

$f :]-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R} / f : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$
 étendue par T -périodicité

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \quad n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right\} = \sum_{k=-N}^N c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kx}$$

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kx}$$

f paire $\Rightarrow Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \mid f$ impaire $\Rightarrow Ff(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right)$

Dirichlet:

$$f \in C_{\text{moy}}^1(\mathbb{R})$$

$$Ff(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Remarque:

Comment choisir $l \times$ dans Dirichlet?

$$x=0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = 0$$

$$x = \frac{T}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = \cos(\pi \cdot u) = (-1)^u$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = 0$$

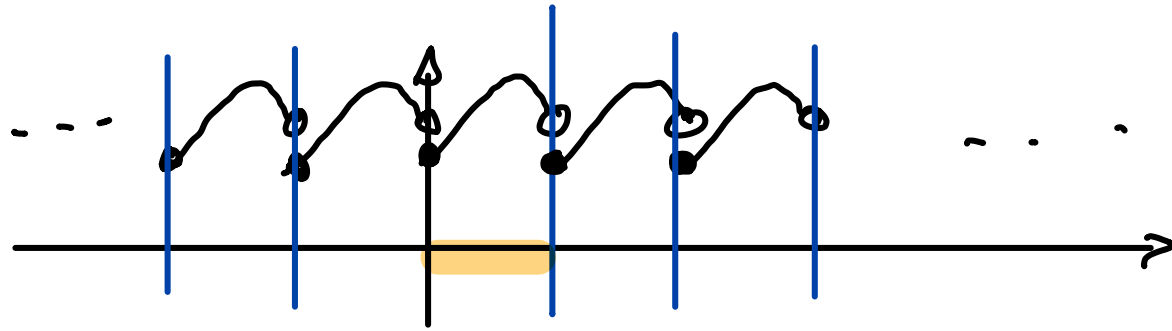
$$x = \frac{T}{4}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u=2k-1 \\ (-1)^k & \text{si } u=2k, \end{cases} \quad k \geq 1$$

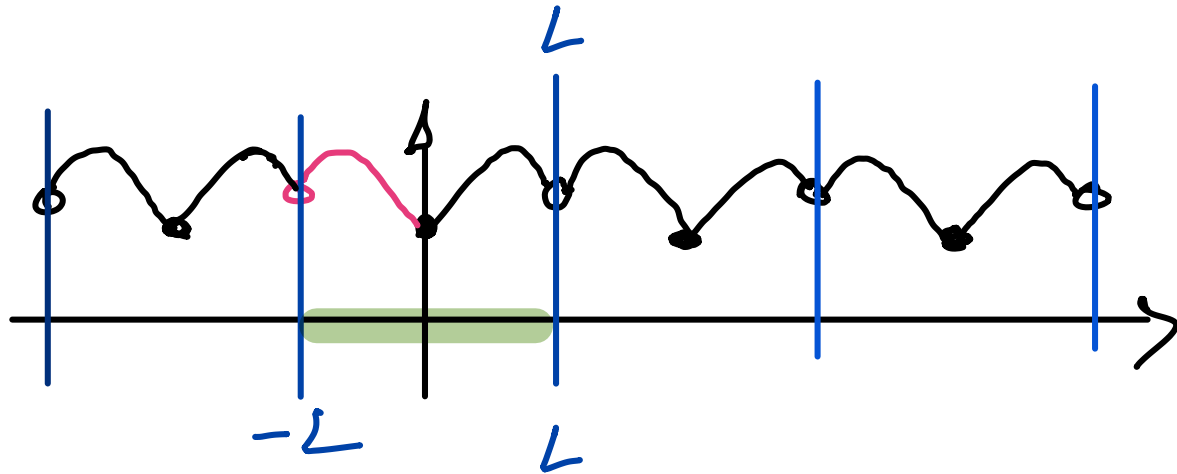
$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}ux\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u=2k \\ (-1)^{k+1} & \text{si } u=2k-1, \end{cases} \quad k \geq 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u=2k \\ (-1)^k & \text{si } u=2k+1, \end{cases} \quad k \geq 0$$

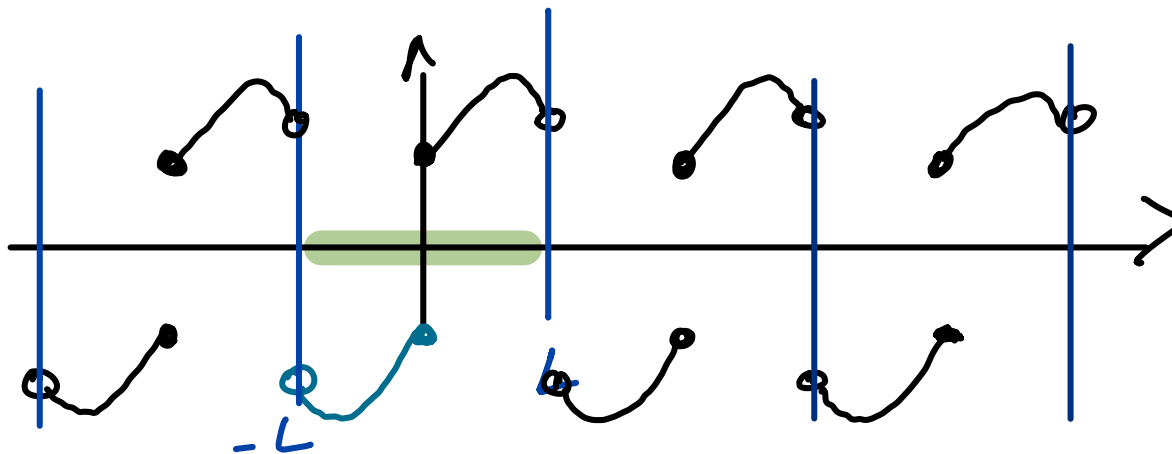
$$f: [0, L[\rightarrow \mathbb{R}$$



extension
 L -périodique



extension *paire*
 $2L$ -périodique



extension *impaire*
 $2L$ -périodique

Proposition 4.13 (Séries de Fourier en cos)

Soit $L > 0$, $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 par morceaux. La série de Fourier en cosinus de f est

$$\overline{F_c} f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \quad \text{où} \quad \tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

Alors, $\overline{F_c} f$ converge vers

$$\overline{F_c} f(x) = \begin{cases} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ f(0+0) & \text{si } x = 0 \\ f(L-0) & \text{si } x = L \end{cases}$$

Proposition 4.14 (Série de Fourier en sinus)

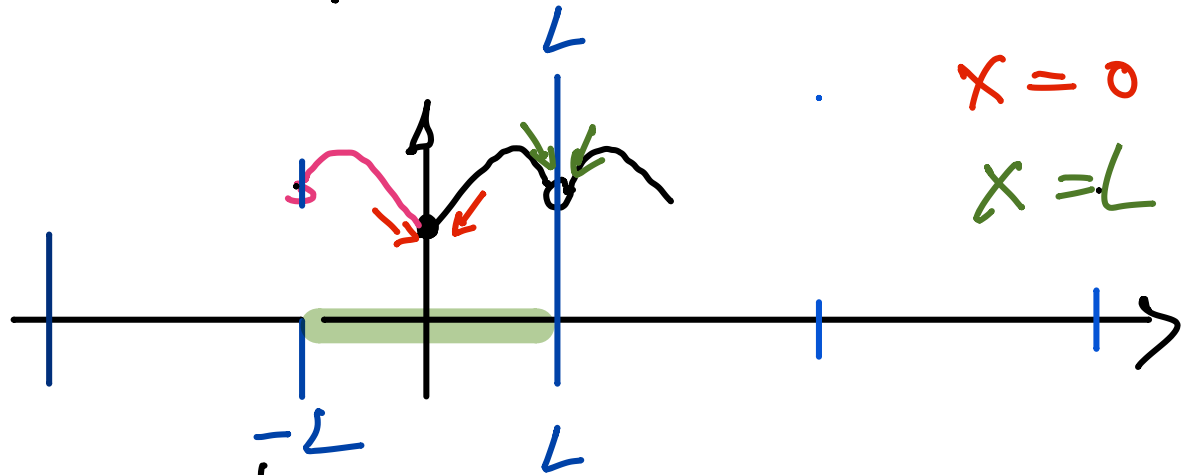
Soit $L > 0$, $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La série de Fourier en sinus de f est

$$F_S f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot nx\right) \quad \text{où} \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

Alors $F_S f$ converge vers

$$F_S f(x) = \begin{cases} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } L \end{cases}$$

Idee de la preuve 4.13



On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{si } x \in]-L, 0[\end{cases}$$

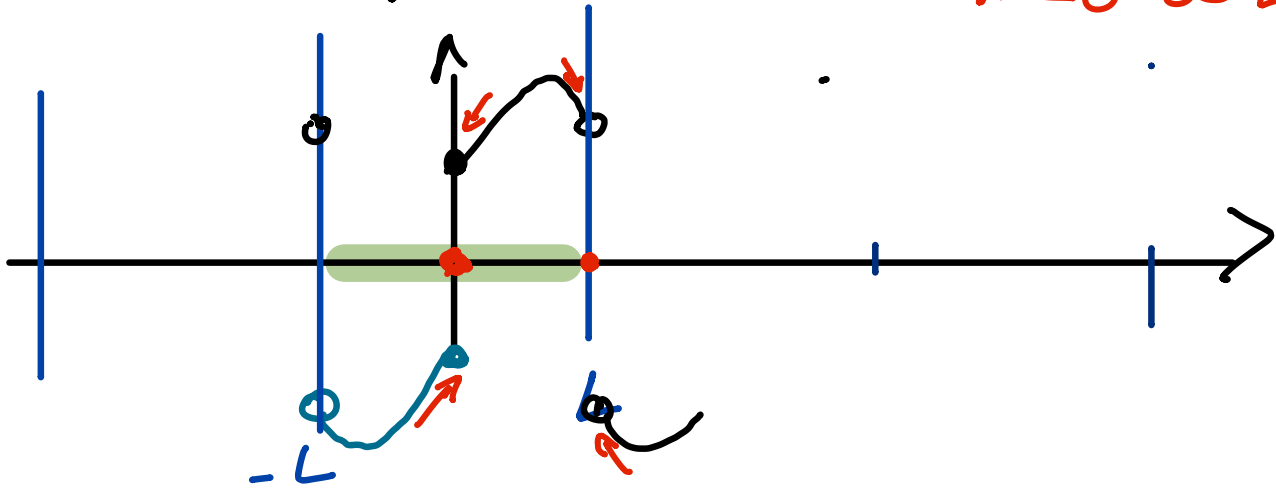
étendu par $2L$ -périodicité

Alors, $\tilde{f}$ est paire, C^{∞} , si $\tilde{a}_n$ et $\tilde{b}_n$ sont les coeffs de Fourier réels de $\tilde{f}$, on a $\tilde{b}_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\tilde{a}_n \underset{T=2L}{=} \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{paire}} \cos\left(\frac{2\pi}{2L} nx\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

Idee de la preuve 4.14

$x=0$ ou L .



Exemple 4.15

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$.

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x \, dx = 1$$

$$\tilde{a}_n = 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \cos(\pi \cdot n \cdot x) \, dx \stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \left[x \cdot \frac{\sin(\pi n x)}{\pi \cdot n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi \cdot n} \, dx$$

$$= \frac{-2}{\pi \cdot n} \left[-\frac{\cos(\pi n x)}{\pi \cdot n} \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2 \cdot n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ -4/\pi^2 (2k-1)^2 & \text{si } n=2k-1, k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_e f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} \cos(\pi(2k-1)x)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin(\pi n x) dx \stackrel{\text{IPP}}{=} -2 \left[x \frac{\cos(\pi n x)}{\pi \cdot n} \right]_0^1 + \frac{2}{\pi \cdot n} \int_0^1 \cos(\pi \cdot n x) dx$$

$$= -\frac{2}{\pi \cdot n} (-1)^n + \frac{2}{\pi^2 \cdot n^2} [\sin(\pi n x)]_0^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi \cdot n}$$

$$\Rightarrow F_g f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi \cdot n} \sin(\pi \cdot n \cdot x)$$

Rem: si $f \in C^0([0, L]) \cap C'_{\text{moy}}([0, L])$, l'extension paire puis $2L$ -périodique est continue sur $\mathbb{R}$

tandis que l'extension impaire et $2L$ -périodique est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0) = f(L) = 0$

Théorème 4.16 : Idemité de Parseval.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux, T -périodique.

Alors,

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

où a_n, b_n , coeffs de Fourier réels, C_n coeffs de Fourier complexes.

Remarque 4.17

(i) le théorème reste vrai sous l'hypothèse $|f|, f^2$ intégrables sur $[0, T]$.

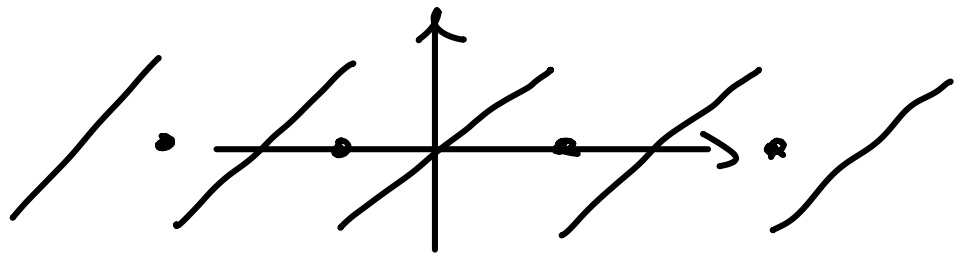
(ii) Une nouvelle méthode pour calculer des séries

Exemple 4.18 :

soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

étendue par 2π -périodicité



f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(nx) dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\text{De plus, } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

On a donc
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(0 + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]^2 \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'où, par Parseval, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Voir ex 4.2(ii) ou 4.9(ii))

Remarque 4.19

Un exercice typique : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique donnée.

1) Calculer sa série de Fourier

2) En déduire la valeur d'une série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$

Pour 2) comment choisir entre Parseval

& Dirichlet? Comparer l'ordre (la plus grande puissance de n) de a_n & b_n et φ_n

si l'ordre des a_n & $b_n = \text{ordre } \phi_n \rightarrow \text{Dirichlet}$

si l'ordre des a_n & $b_n = \frac{1}{2} \text{ ordre } \phi_n \rightarrow \text{Parseval}$.

Par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi \text{ ou } \pi \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\end{cases} \quad \text{à étendre par } 2\pi\text{-périodicité}$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Si on demande $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $\leftarrow$ ordre 1 $\Rightarrow$ Parseval.
 $\leftarrow$ ordre 2

Autre exemple:

$f(x) = x^2$ pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ étendu par 1-périodicité.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad b_n = 0 \quad \text{si on demande de calculer } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$\Rightarrow$ Dirichlet

ordre 2

Proposition 4.20 (Dérivation terme à terme des séries de Fourier)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique, C^1 loc et
continue sur $\mathbb{R}$. Si $f' \in C^1$ loc et a_n, b_n sont
les coefficients de Fourier de f , on a

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i\pi}{T} \cdot n \left(-a_n \sin\left(\frac{2i\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2i\pi}{T} nx\right) \right)$$

$$= \frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2}$$

$$\Rightarrow Ff'(x) = \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2i\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2i\pi}{T} nx\right) \right)'$$

Remarque 4.21

(i) f' n'est en fait pas défini partout il y a
des points isolés où f n'est pas dérivable.

ça n'est pas un problème car

1) Pour calculer les coefficients de Fourier de f' on calcule des intégrales. Le qui se passe sur des points isolés est négligeable

2) $\frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2}$ est définie partout. ($f \in C^1_{\text{weak}}$)

(ii) La continuité de f sur $\mathbb{R}$ est importante
(Δ lorsqu'on étend f par périodicité)